Моделирование возрастной динамики продуктивности древостоев сосны

***И.В. Паламарчук**, соискатель, **А.И. Колтунова**, д.с.-х.н., профессор, **П.Г. Паламарчук**, к.с.-х.н., Оренбургский ГАУ*

Процесс роста дерева и древостоев – основной фактор, определяющий всё многообразие функций, выполняемых как отдельными деревьями, так и лесными экосистемами. Отсюда для науки и практики наибольший интерес представляет выявление динамики прироста (изменения его величины) во времени. Самые разные факторы, влияя на текущий прирост, обусловливают значительную изменчивость его величины даже в одном фиксированном возрасте. Рост и развитие каждого дерева, и тем более древостоя, неповторимы в своей индивидуальности. Это, однако, не означает, что ряды роста, а следовательно, и прироста нельзя подвергнуть определённой систематизации и даже стандартизации. Более того, это необходимое условие для решения ряда важных теоретических и практических задач, таких, как выявление общих закономерностей и региональных особенностей роста и прироста древостоев, установление пределов их варьирования, разработка единой и взаимосвязанной системы общих и зональных лесотаксационных нормативов [1]. Одной из задач наших исследований было изучение закономерностей относительного текущего прироста нелинейных, линейных и массовых показателей древостоев сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.). В своей работе мы, опираясь на базу данных о фитомассе лесов Северной Евразии и таблицы биологической продуктивности (ТБП) основных лесообразующих пород этих лесов [2], провели анализ особенностей относительного текущего изменения высоты (H), диаметра (D), запаса стволовой древесины в коре (M), суммы площади сечений стволов(G) и фитомассы в абсолютно сухом состоянии в коре (P_S), листвы (P_F), ветвей (P_B), и надземной фитомассы (P_{abo}) сосны обыкновенной. Расчёт относительного текущего изменения показателей осуществляли вычислением средней периодической величины показателя за 10-летний период с отнесением полученных значений на конец периода по формуле:

$$Z_i = \frac{x_i - x_{i-10}}{x_i}. \qquad (1)$$

M. Prodan указывает, что ход роста деревьев может быть охарактеризован кривыми распределения Пирсона при помощи дифференциального уравнения [3]. В этом случае отдельные приросты истолковываются как отдельные части достижимой конечной величины. Применение таких кривых для процесса роста приводит к дифференциальному уравнению Пирсона:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w(t_M - t)}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}, \qquad (2)$$

где t_M – время кульминации приростов.

Дифференциальное уравнение Пирсона очень удобно для применения и даёт хорошее приближение к многообразным типам кривых.

В качестве аппроксимирующей функции нами взято уравнение системы кривых Пирсона [4]:

$$Z_{\text{отн}} = \frac{t + b}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}, \qquad (3)$$

где $Z_{\text{отн}} = \dfrac{dy}{ydt}$ – относительное текущее изменение прироста;

t – время, лет.

Рост древостоев и составляющих их деревьев подчиняется одним общим закономерностям, независимо от происхождения, видовой принадлежности и от того, рост ли это системы в целом или её части. Эти общие закономерности и аккумулирует семейство кривых Пирсона, и их использование следует рассматривать в качестве одного из оптимальных вариантов при моделировании процессов роста лесных фитоценозов и составляющих их особей [5].

Для характеристики каждой математической модели найден коэффициент детерминации K_d, который численно показывает, на сколько процентов аппроксимируемая модель отражает фактическую зависимость. Коэффициент детерминации рассчитывался по формуле:

$$K_d = 1 - \frac{D_{\text{ост}}}{D_{\text{о}}}, \qquad (4)$$

где $D_{\text{ост}}$ – остаточная дисперсия;

$D_{\text{о}}$ – общая дисперсия.

Параллельно определению параметров математических моделей была проверена гипотеза об адекватности полученных математических моделей рассматриваемых таксационных показателей по критерию Фишера – Снедекора. Значения наблюдаемого критерия вычисляли по формуле:

$$F_{\text{набл}} = \frac{K_d}{1 - K_d}\frac{n - l}{l - 1} \qquad (5)$$

и по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора определяли критическое значение $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$, где уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, а числа степеней свободы для факторной дисперсии $k_1 = l - 1$ (l – число коэффициентов в математической модели, их было четыре) и $k_2 = n - l$ (n – число наблюдений). Если наблюдаемое значение $F_{\text{набл}}$ больше критического $F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть основную гипотезу, т. е. ошибка модели равна нулю. Следовательно, математическая модель адекватна.

Проведя расчёты для исследуемых групп нормальных и сомкнутых сосняков (I гр.) объёмом 27 ТБП и модальных и нормальных с прореживанием (II гр.) объёмом 11 ТБП, составили по 8 математических моделей, каждая из которых соответствует определённому таксационному показателю (табл. 1).

При сравнении числовых значений параметров найденных моделей b, c_0, c_1, c_2 по каждому показателю, очевидно, что они в большинстве своём приближённо равны (табл. 1).

Для подтверждения случайного характера имеющихся различий необходимо установить, что пары этих чисел (значения параметра для каждого показателя двух групп) различаются незначимо. Что было осуществлено с помощью t-критерия Стьюдента. Для каждого из параметров b, c_0, c_1, c_2 вычислены наблюдаемые значения критерия (табл. 2).

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 8 - 1 = 7$ найдена критическая точка $t_{\text{двуст.кр.}}$ (0,05; 7) = 2,36. Так как $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст.кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Это говорит о том, что значения параметра незначимо различаются друг от друга.

1. Параметры модели продуктивности древостоев естественных сосняков (для модальных и нормальных с прореживаниями $F_{\text{кр}} = 2,69$; для нормальных и сомкнутых $F_{\text{кр}} = 2,64$).

Показатель	Параметры уравнения				Коэффициент детерминации, Kd	Наблюдаемое значение, $F_{\text{Н}}$
	b	C_0	C_1	C_2		
модальные и нормальные с прореживаниями сосняки						
$Z(H)$	–177,0549559	–7,386323419	–11,11016925	–0,053733706	0,967	1043,741
$Z(D)$	–176,9034523	–7,553843793	–14,89138883	0,045076459	0,9163	386,965
$Z(G)$	–177,0957675	–7,15873948	–6,216183152	–0,406777674	0,874	244,422
$Z(M)$	–177,1882068	–7,254129309	–8,020224725	–0,066769246	0,938	537,542
$Z(P_S)$	–176,184209	–6,703238592	–8,350116555	–0,054166299	0,942	572,127
$Z(P_F)$	–178,5981884	–7,167375695	–12,33223421	0,060799794	0,749	105,375
$Z(P_B)$	–176,936386	–7,781737894	–19,31608798	–0,017941907	0,722	91,772
$Z(P_{abo})$	–177,0540012	–7,37834233	–10,85283998	–0,03638358	0,922	416,715
нормальные и сомкнутые сосняки						
$Z(H)$	–177,0267981	–7,400061667	–11,39201977	–0,047914678	0,957	1975,138
$Z(D)$	–176,9186065	–7,492755922	–13,53754603	0,034813078	0,900	794,056
$Z(G)$	–178,6948024	–7,140868712	–11,27261884	–0,230252143	0,7281	235,676
$Z(M)$	–178,7225871	–7,050911523	–9,585489534	–0,024590598	0,943	1466,12
$Z(P_S)$	–178,7159339	–7,058554753	–9,799106077	–0,017273002	0,9467	1562,601
$Z(P_F)$	–178,6826405	–7,130588906	–11,10478899	0,051613271	0,774	304,342
$Z(P_B)$	–177,6483059	–7,422401042	–19,26874195	0,045125889	0,742	252,762
$Z(P_{abo})$	–177,0059353	–7,420282817	–11,87308198	0,003084533	0,932	1208,627

2. Параметры уравнений и наблюдаемые значения t-критерия Стьюдента

Показатель	Параметры уравнения							
	b		C_0		C_1		C_2	
	I группа	II группа	I группа	II группа	I группа	II группа	I группа	II группа
$Z(H)$	–177,055	–177,027	–7,386	–7,4	–11,11	–11,392	–0,054	–0,048
$Z(D)$	–176,903	–176,919	–7,554	–7,493	–14,891	–13,538	0,045	0,035
$Z(G)$	–177,096	–178,695	–7,159	–7,141	–6,216	–11,273	–0,407	–0,23
$Z(M)$	–177,188	–178,723	–7,254	–7,051	–8,02	–9,586	–0,067	–0,025
$Z(P_S)$	–176,184	–178,716	–6,703	–7,059	–8,35	–9,799	–0,054	–0,017
$Z(P_F)$	–178,598	–178,683	–7,167	–7,131	–12,332	–11,105	0,061	0,052
$Z(P_B)$	–176,936	–177,648	–7,782	–7,422	–19,316	–19,269	–0,018	0,045
$Z(P_{abo})$	–177,054	–177,006	–7,378	–7,42	–10,853	–11,873	–0,036	0,003
$T_{\text{набл}}$	2,31		–0,46		1,17		–2,03	

Если отвлечься от рассматриваемых групп и таксационных показателей для каждой группы и сравнить полученные 16 числовых значений для каждого из параметров b, c_0, c_1, c_2 математических моделей, то становится ясно, что они так же мало отличаются друг от друга. Таким образом, видится возможным создание одной математической модели относительного текущего прироста.

Рассматривая совокупность полученных значений по каждому из параметров b, c_0, c_1, c_2 как выборку и в качестве гипотетических значений параметров искомой математической модели относительного текущего прироста, возьмём соответствующие средние значения. Получаем следующую гипотетическую математическую модель:

$$Z_{\text{отн}} = \frac{t - 177{,}5269}{-7{,}2813 - 11{,}8077t - 0{,}0447t^2}, \quad (6)$$

где $Z_{\text{отн}} = \frac{dy}{ydt}$ – относительное текущее изменение прироста;

t – время, лет.

Очевидно, что при расчёте относительного текущего прироста по формуле (6) и по ранее полученным математическим моделям (табл. 1) для каждого показателя их числовые значения будут отличаться.

Возможно, что расхождение случайно (незначимо), а возможно, что расхождение неслучайно (значимо), и тогда наше предположение о получении единой модели неверно. Чтобы выяснить это, мы воспользовались критерием Пирсона. Эмпирические относительные текущие приросты для каждого показателя двух групп рассчитывали, используя параметры модели продуктивности древостоев естественных сосняков. Теоретические относительные текущие приросты рассчитывали по гипотетической математической модели (6). Из восьми вычисленных наблюдаемых значений критерия – наибольшее значение было равно 1,12, что меньше критического значения 11,07 при уровне значимости 0,05 и числу степеней свободы 5. Следовательно, мы установили, что на принятом уровне значимости расхождения между эмпирическими и теоретическими значениями относительного текущего прироста незначимые.

Следующим шагом наших исследований явилось проведение верификации полученной модели на пробных площадях. Для чего были рассчитаны эмпирические значения относительного текущего прироста высоты (H), диаметра (D), запаса (M) древостоев и фитомассы в абсолютно сухом состоянии стволов в коре (P_S), листвы (P_F), ветвей ($P_В$) сосны обыкновенной по формуле (1). Теоретические значения относительного текущего прироста этих показателей рассчитывали, используя формулу (6) в период от 30 до 120 лет включительно с шагом в 10 лет. Далее было проведено сравнение данных рядов по критерию хи-квадрат Пирсона. Наибольшее из шести рассчитанных наблюдаемых значений критерия равнялось 30,44, а критическое значение – 127,69 при уровне значимости 0,05 и числе степеней свободы 103, что говорит о статистически незначимых отличиях относительного текущего прироста показателей древостоев на пробных площадях от рассчитанных по найденной единой математической модели.

Таким образом, проведённый анализ позволяет утверждать, что относительный текущий прирост высоты (H), диаметра (D), запаса (M) древостоев, суммы площадей сечений стволов (G) и фитомассы в абсолютно сухом состоянии стволов в коре (P_S), листвы (P_F), ветвей ($P_В$) и надземной фитомассы (P_{abo}) древостоев сосняков Северной Евразии не зависят от условий и района произрастания, а их возрастную динамику отражает дифференциальное уравнение системы кривых Пирсона.

Литература

1. Антанайтис В.В., Загреев В.В. Прирост леса. 2-е изд., пераб. М.: Лесная промышленность, 1986. 200 с.
2. Усольцев В.А. Фитомасса лесов Северной Евразии: база данных и география. Екатеринбург:УрО РАН, 2001. 707 с.
3. Prodan M. Forest Biometrics. Oxford: Pergamon Press, 1968. 447 p.
4. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
5. Колтунова А.И. Некоторые закономерности текущего накопления фитомассы в древостоях// Леса Урала и хозяйство в них: сб. науч. трудов. Екатеринбург, 2004. С. 148–157.