

Математическая модель электрических параметров устройства симметрирования фазных напряжений

В.В. Морозов, д.т.н., профессор, **О.А. Герасимова**, д.т.н., **М.Ю. Егоров**, ст. преподаватель, ФГБОУ ВО Великолукская ГСХА; **В.А. Шахов**, д.т.н., профессор, **В.В. Реймер**, к.т.н., ФГБОУ ВО Оренбургский ГАУ

В процессе разработки устройства симметрирования фазных напряжений (УСФН) появляется необходимость анализа его функционирования в различных режимах и оценки эффективности устройства в плане улучшения качества электри-

ческой энергии по уровню напряжения и несимметрии напряжений [1, 2]. Для этого необходимо разработать математическую модель электрических параметров УСФН, которая должна позволять вычислять на его выходе величину напряжения нулевой последовательности, линейные и фазные напряжения, определять соотношение токов в обмотках трансформаторов в зависимости от величин фазных напряжений на входе устройства, величин полной мощности нагрузок по фазам и

значений параметров элементов трансформаторов. Принципиальная электрическая схема устройства представлена на рисунке 1.

Материал и методы исследования. Разработку математической модели выполняли для установившегося режима работы УСФН с использованием следующих методов, разделов и положений теоретической электротехники: основ теории цепей переменного тока [3], теории электромагнитных явлений, теории электрических машин и трансформаторов [4], метода симметричных составляющих, символического метода расчёта цепей переменного тока. В исследовании использовали и аппарат линейной алгебры: теорию определителей, методы решения систем линейных алгебраических уравнений и прочие методики. Последнее допустимо по той причине, что хотя с точки зрения электротехники силовые трансформаторы не являются линейными элементами, при определённых обстоятельствах с учётом сочетания ряда факторов в общем случае и в условиях решаемой частной задачи можно этой нелинейностью пренебречь и считать трансформатор и все его основные элементы в достаточной степени линейными электрическими компонентами. Входные и выходные фазные и линейные напряжения и токи, напряжения нулевой, прямой и обратной последовательностей, сопротивления первичных и вторичных обмоток всех трансформаторов и нагрузок устройства будем представлять в комплексном виде. Таким образом, получающиеся в итоге искомые соотношения будут также выражены с использованием комплексной формы записи электротехнических величин.

Также следует обязательно отметить объективную проблему, которая естественным образом

возникает при теоретическом анализе и исследовании электрооборудования и аппаратов, имеющих схожую с устройством симметрирования фазных напряжений специфику применения и функционирования. Дело в том, что ток нагрузки подобных устройств протекает по обмоткам устройства, которые оказывают некоторое ненулевое сопротивление (имеющее чисто активный или смешанный активно-реактивный характер) протекающему току, отчего на этом сопротивлении происходит падение напряжения. В результате на каждую фазную нагрузку приходится несколько меньшее по величине напряжение. В то же время ток нагрузки каждой из фаз зависит в числе прочего от приложенного к зажимам нагрузки напряжения, а это, в конечном итоге, влияет на потребляемую по каждой фазе полную, активную и реактивную мощности. Таким образом, появляются трудности объективного характера при попытке задать во время разработки математической модели величину нагрузки каждой из фаз либо в виде потребляемого ею полного тока, либо в виде непосредственно её полной мощности.

Одним из решений возникшего затруднения может быть задание нагрузки каждой из фаз через её полное комплексное сопротивление, которое, например, для линейных нагрузок не зависит от величины протекающего тока или величины приложенного напряжения, а для существующих на данный момент в электрических сетях нагрузок с нелинейным характером сопротивления будет существенно меняться с учётом того, что на выходе УСФН согласно его прямому функциональному предназначению не предполагается значительных колебаний уровня напряжения, которые могли

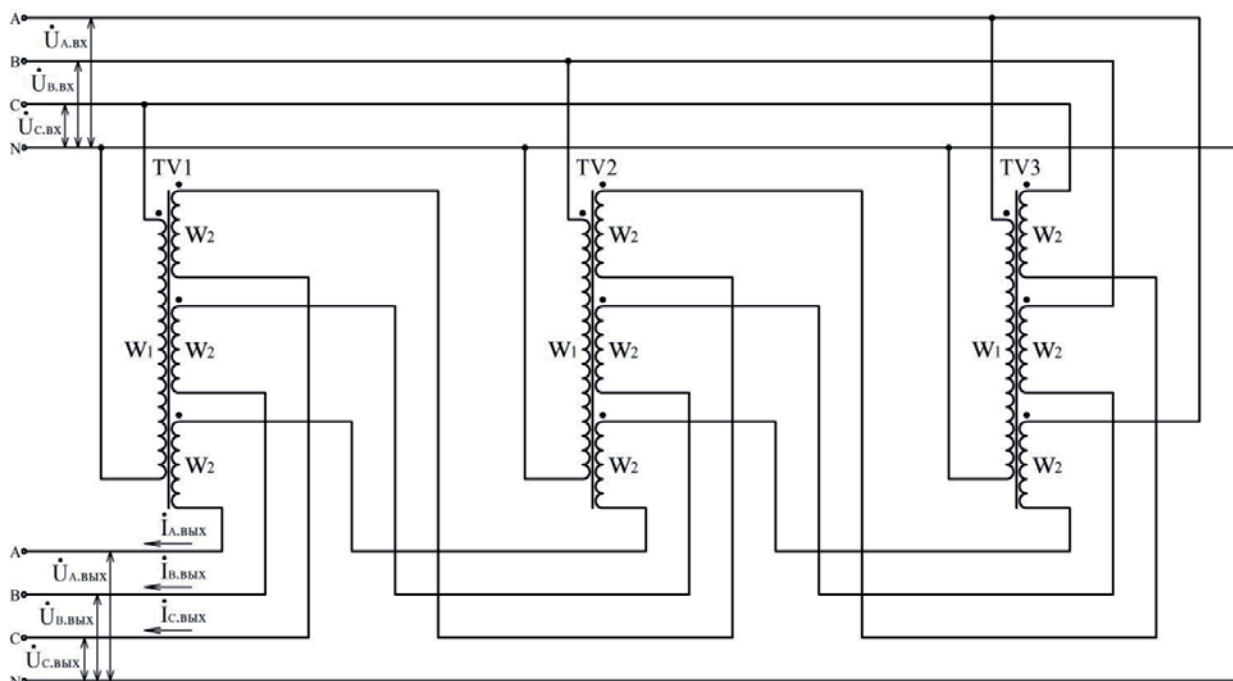


Рис. 1 – Принципиальная электрическая схема УСФН

бы вызвать существенные изменения величины сопротивления возможной нелинейной нагрузки. В свою очередь, полное комплексное сопротивление любой нагрузки можно без особого труда выразить через такие параметры, как номинальная полная мощность, номинальное напряжение питания, коэффициент мощности, главные параметры, указываемые на паспортной табличке или в руководстве по эксплуатации любой электроустановки или электрического устройства бытового или промышленного назначения.

Результаты исследования. Для анализа имеющейся электрической схемы устройства симметрирования фазных напряжений применим второй закон Кирхгофа [3]. Учтём также основные сведения по схемам замещения обмоток силовых трансформаторов [4], которые являются общепринятыми в специализированной литературе по теории трансформаторов и электрических машин. В итоге можно записать для всех трёх фаз УСФН следующую систему уравнений в комплексном виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_{A.BX} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{B2} + \dot{E}_{C2} = \\ = 3\dot{I}_{A.BYX} \cdot (r_2 + j \cdot x_{S2}) + \dot{U}_{A.BYX} \\ \dot{U}_{B.BX} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{B2} + \dot{E}_{C2} = \\ = 3\dot{I}_{B.BYX} \cdot (r_2 + j \cdot x_{S2}) + \dot{U}_{B.BYX} \\ \dot{U}_{C.BX} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{B2} + \dot{E}_{C2} = \\ = 3\dot{I}_{C.BYX} \cdot (r_2 + j \cdot x_{S2}) + \dot{U}_{C.BYX} \end{cases}, \quad (1)$$

где $\dot{U}_{A.BX}$, $\dot{U}_{B.BX}$ и $\dot{U}_{C.BX}$ – фазные напряжения на входе УСФН, В;

$\dot{U}_{A.BYX}$, $\dot{U}_{B.BYX}$ и $\dot{U}_{C.BYX}$ – фазные напряжения на выходе УСФН, В;

$\dot{E}_{A2}$, $\dot{E}_{B2}$ и $\dot{E}_{C2}$ – ЭДС вторичных обмоток трансформаторов, первичные обмотки которых питаются соответственно от фазных напряжений $\dot{U}_{A.BX}$, $\dot{U}_{B.BX}$ и $\dot{U}_{C.BX}$, В;

$\dot{I}_{A.BYX}$, $\dot{I}_{B.BYX}$ и $\dot{I}_{C.BYX}$ – фазные токи, потребляемые трёхфазной нагрузкой устройства и протекающие по вторичным обмоткам трансформатора, А;

r_2 – активное сопротивление провода вторичных обмоток трансформаторов УСФН, Ом;

x_{S2} – реактивное сопротивление рассеяния вторичных обмоток трансформаторов УСФН, Ом;

j – мнимая единица (справедливо соотношение $j^2 = -1$).

Применим второй закон Кирхгофа для анализа цепей, содержащих первичные обмотки силовых трансформаторов, входящие в состав устройства симметрирования фазных напряжений. Вначале составлять соответствующее уравнение будем для первичной обмотки 1-го трансформатора, которая подключена к входному фазному напряжению $\dot{U}_{A.BX}$. Получаем:

$$\dot{U}_{A.BX} = -\dot{E}_{A1} + \dot{I}_{1.1} \cdot (r_1 + j \cdot x_{S1}), \quad (2)$$

где $\dot{E}_{A1}$ – ЭДС, возникающая в первичной обмотке трансформатора, В;

r_1 – активное сопротивление первичной обмотки, Ом;

x_{S1} – сопротивление рассеяния первичной обмотки, Ом;

$\dot{I}_{1.1}$ – ток первичной обмотки 1-го трансформатора, А.

Затем выразим из уравнения (2) значение ЭДС первичной обмотки.

Выразим из уравнения (2) значение электродвижущей силы $\dot{E}_{A1}$ первичной обмотки, затем учтём известное из теории трансформаторов соотношение, устанавливающее связь между током этой обмотки и токами вторичных обмоток (с использованием понятия «приведённый ток»). При этом нужно принять во внимание, что приведённые токи вторичных обмоток будут складываться между собой геометрически, а также то, что в сумме они с учётом соотношения между числами витков первичной и каждой из вторичных обмоток (оно равно 3 согласно описанию патента на устройство) дадут значение, геометрически равное току нулевой последовательности трёхфазной нагрузки устройства симметрирования фазных напряжений. В итоге путём ряда преобразований получаем следующее уравнение для ЭДС первичной обмотки:

$$\dot{E}_{A1} = -\dot{U}_{A.BX} + (\dot{I}_{01} - \dot{I}_{0.BYX}) \cdot (r_1 + j \cdot x_{S1}), \quad (3)$$

где $\dot{I}_{01}$ – ток холостого хода первого трансформатора (геометрическая сумма реактивного намагничивающего тока и активного тока, обусловленного потерями в стали магнитопровода трансформатора), А;

$\dot{I}_{0.BYX}$ – ток нулевой последовательности нагрузки УСФН, А.

Теперь необходимо учесть, что устройство состоит из трёх идентичных силовых четырёхобмоточных трансформаторов, поэтому уравнения для ЭДС первичных обмоток остальных трансформаторов будут получаться аналогичным образом. Запишем их без вывода, указав отдельно только вновь введённые обозначения:

$$\dot{E}_{B1} = -\dot{U}_{B.BX} + (\dot{I}_{02} - \dot{I}_{0.BYX}) \cdot (r_1 + j \cdot x_{S1}); \quad (4)$$

$$\dot{E}_{C1} = -\dot{U}_{C.BX} + (\dot{I}_{03} - \dot{I}_{0.BYX}) \cdot (r_1 + j \cdot x_{S1}), \quad (5)$$

где $\dot{I}_{02}$ и $\dot{I}_{03}$ – токи холостого хода соответственно 2-го и 3-го трансформаторов, А.

Имея выражения для ЭДС первичных обмоток, нетрудно перейти к выражениям для ЭДС вторичных обмоток. При этом нужно также принять во внимание, что при сложении трёхфазных напряжений получается тройное значение вектора напряжения нулевой последовательности [5]. Кроме того, следует сделать ряд допущений относительно токов холостого хода и реактивных сопротивлений

рассеяния первичных и вторичных обмоток трансформатора. Эти допущения являются следствием специфических свойств используемой в устройстве симметрирования фазных напряжений разновидности силовых трансформаторов – тороидальных, а также обусловлены самой схемой устройства и режимом функционирования трансформаторов в составе электрической схемы УСФН. Первое допущение касается того, что реактивными сопротивлениями рассеяния первичных и вторичных обмоток трансформаторов устройства можно пренебречь. Это обосновывается тем, что у тороидальных трансформаторов витки обмоток расположены по всей поверхности магнитопровода [4], отчего обмотки размещаются в малое количество слоёв (иногда всего в один слой), а потому магнитный поток, создаваемый витками, полностью практически сосредоточен в магнитопроводе. Второе допущение касается того, что величиной, получающейся при векторном сложении токов холостого хода всех трёх трансформаторов, можно также пренебречь. Это допущение является следствием общеизвестного факта: у тороидальных трансформаторов ток холостого хода мал по сравнению с другими типами трансформаторов подобной мощности, поскольку конструкция магнитопроводов данных трансформаторов не имеет в силу технологии их изготовления (навивка из ленты электротехнической стали) воздушных зазоров [4]. Кроме того, первичная обмотка каждого трансформатора должна быть рассчитана на напряжение выше номинального (вплоть до уровня линейного напряжения сети на случай значительной несимметрии напряжений), а потому при большинстве эксплуатационных режимов индукция в магнитопроводе будет ниже предельного уровня, что, очевидно, скажется и на величине токов холостого хода в сторону их уменьшения.

В итоге, введя вышеописанные и обоснованные допущения, выполнив ряд преобразований, с учётом уравнений (3), (4) и (5) приведём ранее полученную систему уравнений (1) к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{U}_{A.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = 3\dot{I}_{A.BYX} \cdot r_2 + \dot{U}_{A.BYX} \\ \dot{U}_{B.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = 3\dot{I}_{B.BYX} \cdot r_2 + \dot{U}_{B.BYX} \\ \dot{U}_{C.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = 3\dot{I}_{C.BYX} \cdot r_2 + \dot{U}_{C.BYX} \end{cases} \quad (6)$$

Далее выразим комплексные фазные токи через комплексные фазные напряжения и сопротивления соответствующих фаз трёхфазной нагрузки, используя закон Ома для участка цепи в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_{A.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = \dot{U}_{A.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_A} + 1 \right) \\ \dot{U}_{B.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = \dot{U}_{B.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_B} + 1 \right) \\ \dot{U}_{C.BX} - \dot{U}_{0.BX} - r_1 \cdot \dot{I}_{0.BYX} = \\ = \dot{U}_{C.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_C} + 1 \right) \end{cases}, \quad (7)$$

где Z_A , Z_B и Z_C – сопротивления фаз трёхфазной нагрузки, Ом.

Ток нулевой последовательности $\dot{I}_{0.BYX}$, создаваемый несимметричной трёхфазной нагрузкой, выразим с учётом закона Ома для участка цепи через фазные напряжения на выходе устройства и импедансы (полные сопротивления) фаз его трёхфазной нагрузки:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{0.BYX} &= \frac{(\dot{I}_{A.BYX} + \dot{I}_{B.BYX} + \dot{I}_{C.BYX})}{3} = \\ &= \frac{\dot{U}_{A.BYX}}{3Z_A} + \frac{\dot{U}_{B.BYX}}{3Z_B} + \frac{\dot{U}_{C.BYX}}{3Z_C}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, появляется возможность представить нагрузку устройства в виде её комплексного сопротивления. Используя выражение (8) и выполнив ряд простых преобразований, запишем систему уравнений (7) окончательно следующим образом [6]:

$$\begin{cases} \dot{U}_{A.BX} - \dot{U}_{0.BX} = \dot{U}_{A.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_A} + \frac{r_1}{3Z_A} + 1 \right) + \\ + \dot{U}_{B.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_B} + \dot{U}_{C.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_C} \\ \dot{U}_{B.BX} - \dot{U}_{0.BX} = \dot{U}_{A.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_A} + \\ + \dot{U}_{B.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_B} + \frac{r_1}{3Z_B} + 1 \right) + \dot{U}_{C.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_C} \\ \dot{U}_{C.BX} - \dot{U}_{0.BX} = \dot{U}_{A.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_A} + \\ + \dot{U}_{B.BYX} \cdot \frac{r_1}{3Z_B} + \dot{U}_{C.BYX} \cdot \left(\frac{3r_2}{Z_C} + \frac{r_1}{3Z_C} + 1 \right) \end{cases} \quad (9)$$

Полученная окончательная система линейных алгебраических уравнений должна быть решена относительно выходных фазных напряжений. В итоге будут получены формулы для расчёта комплексных значений выходных фазных напряжений в зависимости от комплексных полных сопротивлений

фаз трёхфазной нагрузки, комплексных входных фазных напряжений (сетевых фазных напряжений) и активных сопротивлений обмоток, входящих в состав рассматриваемого устройства силовых трансформаторов. На основе указанных формул, основных положений теории трёхфазных цепей и метода симметричных составляющих могут быть рассчитаны выходные линейные напряжения, составляющие выходных фазных напряжений обратной и нулевой последовательности. При этом нужно заметить, что параметры нагрузки должны задаваться с учётом нормальных эксплуатационных режимов устройства симметрирования и стабилизации фазных напряжений.

Систему уравнений (9) можно решить с помощью известных из курса высшей математики формул Крамера. Для уменьшения объёма получающихся в результате выражений введём ряд сокращающих обозначений:

$$p_1 = \frac{3r_2}{Z_A} + \frac{r_1}{3Z_A} + 1; \quad p_2 = \frac{3r_2}{Z_B} + \frac{r_1}{3Z_B} + 1; \quad p_3 = \frac{3r_2}{Z_C} + \frac{r_1}{3Z_C} + 1; \quad (10)$$

$$d_1 = \dot{U}_{A.BX} - \dot{U}_{0.BX}; \quad d_2 = \dot{U}_{B.BX} - \dot{U}_{0.BX}; \quad d_3 = \dot{U}_{C.BX} - \dot{U}_{0.BX}; \quad (11)$$

$$a = \frac{r_1}{3Z_A}; \quad b = \frac{r_1}{3Z_A}; \quad c = \frac{r_1}{3Z_A}. \quad (12)$$

С использованием выражений (10), (11) и (12), применённых для сокращения объёма итоговых формул, получаем значения определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & b & c \\ a & p_2 & c \\ a & b & p_3 \end{vmatrix} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot p_3 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c - a \cdot c \cdot p_2; \quad (13)$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} d_1 & b & c \\ d_2 & p & c \\ d_3 & b & p_3 \end{vmatrix} = d_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - d_1 \cdot b \cdot c - d_2 \cdot b \cdot p_3 + b \cdot c \cdot (d_2 + d_3) - d_3 \cdot c \cdot p_2; \quad (14)$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} p_1 & d_1 & c \\ a & d_2 & c \\ a & d_3 & p_3 \end{vmatrix} = p_1 \cdot d_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot c \cdot d_3 - a \cdot d_1 \cdot p_3 + a \cdot c \cdot (d_1 + d_3) - a \cdot c \cdot d_2; \quad (15)$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} p_1 & b & d_1 \\ a & p_2 & d_2 \\ a & b & d_3 \end{vmatrix} = p_1 \cdot p_2 \cdot d_3 - p_1 \cdot d_2 \cdot b - a \cdot b \cdot d_3 + a \cdot b \cdot (d_1 + d_2) - a \cdot d_1 \cdot p_2; \quad (16)$$

$$\dot{U}_{A.BYX} = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \quad \dot{U}_{B.BYX} = \frac{\Delta_B}{\Delta}; \quad \dot{U}_{C.BYX} = \frac{\Delta_C}{\Delta}. \quad (17)$$

Согласно формулам для расчёта линейных напряжений через значения фазных и с учётом формул (17) получаем расчётные выражения для определения линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB.BYX} = \frac{\Delta_A - \Delta_B}{\Delta}; \quad \dot{U}_{BC.BYX} = \frac{\Delta_B - \Delta_C}{\Delta}; \quad \dot{U}_{CA.BYX} = \frac{\Delta_C - \Delta_A}{\Delta}. \quad (18)$$

В итоге, учитывая известное соотношение из метода симметричных составляющих, получаем, что напряжение нулевой последовательности на выходе устройства симметрирования фазных напряжений рассчитывается по следующему выражению:

$$\dot{U}_{0.BYX} = \frac{\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C}{3 \cdot \Delta}. \quad (19)$$

Выводы

1. Проведено теоретическое исследование устройства симметрирования фазных напряжений в установившемся режиме работы, в результате чего разработана математическая модель, учитывающая девять основных его электрических параметров.

2. Получено семь математических выражений в комплексном виде, позволяющих найти фазные, линейные напряжения и напряжения нулевой последовательности на выходе устройства, зная фазные напряжения на его входе, параметры нагрузки и элементов устройства.

3. Анализ модели показал, что напряжение нулевой последовательности на выходе УСФН зависит от соотношения между комплексными сопротивлениями несимметричной нагрузки, от величин активных сопротивлений обмоток трансформаторов и не зависит от напряжения нулевой последовательности на входе устройства и величины симметричной нагрузки.

Литература

- Егоров М.Ю. Теоретическое исследование симметрирующего устройства в установившемся режиме работы // Промышленная энергетика. 2017. № 5. С. 21–24.
- Егоров М.Ю., Самарин Г.Н., Ружьев В.А. Способы коррекции уровней напряжения и несимметрии напряжений в сетях 0,4 кВ // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. 2017. № 4. С. 279–286.
- Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. М.: Лань, 2010. 592 с.
- Котенев С.В., Евсеев А.Н. Расчёт и оптимизация тороидальных трансформаторов и дросселей. М.: Горячая линия – Телеком, 2013. 360 с.
- Косоухов Ф.Д., Наумов И.В. Несимметрия напряжений и токов в сельских распределительных сетях. Иркутск: ИРГСХА, 2003. 257 с.
- Егоров М.Ю. Повышение качества электрической энергии в сельских сетях 0,38 кВ путём разработки устройства симметрирования и стабилизации фазных напряжений: дис. ... канд. техн. наук. СПб.-Пушкин, 2018. 195 с.